Wiederholung

(M^n, g) Riemannsche Mft. mit LC-Zus. $\overline{\nabla}$

Rahmenbündel $\quad P_G \longrightarrow M, \qquad G = SO(n)$

$\varrho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, V \qquad$ SO(n)-Darstellung

$VM := P_G \times_\varrho V \qquad$ assoziiertes VB mit induzierten Zus. ∇

kanonische Zerlegung: $\quad T \otimes V = \bigoplus_\varepsilon V_\varepsilon \qquad$ V_ε paarweise nicht äquivalente G-Darstellungen!

verallgemeinerte Gradienten: $\quad D_\varepsilon := pr_\varepsilon \circ \nabla$

universelle WBF: $\quad q(R) = -\sum b_\varepsilon D_\varepsilon^* D_\varepsilon$

wobei: $\quad b_\varepsilon = \frac{1}{2}\left(c_T + c_V - c_{V_\varepsilon} \right)$

$$q(R) = \frac{1}{2} \sum (e_i \wedge e_j)_* \circ R(e_i \wedge e_j)_*$$

Beispiel: $\quad V = \mathrm{Sym}^k_0 T$

$$c_V = -k(k+n-2)$$

$$T \otimes \mathrm{Sym}^k_0 T \cong \mathrm{Sym}^{k+1}_0 T \oplus \mathrm{Sym}^{k-1}_0 T \oplus \mathrm{Sym}^{k,1} T$$

b_ε	k	$n+k-2$	1
	ε_1	ε_2	ε_3

$$\Rightarrow q(R) = -k P_{\varepsilon_1}^* P_{\varepsilon_1} + (n+k-2) P_{\varepsilon_2}^* P_{\varepsilon_2} + P_{\varepsilon_3}^*$$

Differential: $\quad d : \Gamma(\mathrm{Sym}^k TM) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sym}^{k+1} TM)$

$$dK = \sum e_i \cdot \nabla_{e_i} K$$

Divergenz: $\quad \delta : \Gamma(\mathrm{Sym}^k TM) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sym}^{k-1} TM)$

$$\delta K = -\sum e_i \lrcorner \nabla_{e_i} K$$

$d_0^* d_0 = (k+1) P_{\varepsilon_1}^* P_{\varepsilon_1}, \qquad \delta^* \delta = \frac{(n+2k-2)(n+k-3)}{n+2k-4} P_{\varepsilon_2}^* P_{\varepsilon_2}$

Der Standard-Laplace-Operator

Definition: Der Standard-Laplace-Operator auf den Schnitten von VM ist definiert durch:

$$\Delta_V := \nabla^* \nabla + q(R)$$

Operator vom Laplace-Typ: Hauptsymbol = Metrik

Bemerkung: $\Delta_V = \sum_\varepsilon (1 - b_\varepsilon) D_\varepsilon^* D_\varepsilon$

Beispiele: ① $V = \Lambda^k T$

$$\Delta_V = \Delta_{Hodge} = d^* d + d d^*$$

$\tilde{V} \subset V = \Lambda^k T$ Hol-invariantes UR ($\hat{=}$ paralleles Unterbündel)

$$\rightarrow \Delta_{Hodge}\big|_{\tilde{V}M} = \Delta_{\tilde{V}}$$

$$\rightarrow H^k_{dR}(M) = \bigoplus_{\tilde{V}} \operatorname{Ker} \Delta_{\tilde{V}} \otimes \operatorname{Hom}_{Hol}(\tilde{V}, \Lambda^k T)$$

wichtig: $\Delta_{\tilde{V}}$ hängt nur von der Darstellung $\tilde{V}$ ab, nicht von der Einbettung $\tilde{V} \subset \Lambda^k T$.

② $M = G/K$ symmetrischer Raum, $VM = G \times_\rho V$

$$\rightarrow \Delta_V = \operatorname{Cas}^G_\rho$$

③ $V = \operatorname{Sym}^k T$

$\Delta_V = \Delta_L$ Lichnerowicz-Laplace-Operator

$\Delta_L = \nabla^* \nabla + q(R)$ auf $\Gamma(\operatorname{Sym}^k TM)$

$k=2$: $q(R) = 2\mathring{R} + \operatorname{Ric}$

mit $(\mathring{R} h)(X,Y) = \sum_i h(R_{X,e_i} Y, e_i)$

$(\operatorname{Ric} h)(X,Y) = h(\operatorname{Ric} X, Y) + h(X, \operatorname{Ric} Y)$

Anwendung: Konforme Killing-Tensoren

Definition: (i) $K \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k TM)$ heißt Killing-Tensor, falls
$$dK = 0$$

(ii) $K \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k TM)$ heißt konformer Killing-Tensor, falls
$$dK = g \cdot k$$
für ein $k \in \Gamma(\mathrm{Sym}^{k-1} TM)$.

Bemerkung:
- dK ist die vollständige Symmetrisierung von ∇K
  zB $k=2$: $dK(X,Y,Z) = (\nabla_X K)(Y,Z) + (\nabla_Y K)(Z,X) + (\nabla_Z K)(X,Y)$
- d ist eine Derivation, d.h.
$$d(K \cdot Q) = (dK) \cdot Q + K \cdot (dQ)$$

Definition: Die Schouten-Klammer auf $\Gamma(\mathrm{Sym}^* TM)$ ist definiert durch:
$$[\cdot\,;\cdot] : \Gamma(\mathrm{Sym}^k TM) \times \Gamma(\mathrm{Sym}^l TM) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sym}^{k+l-1} TM)$$
$$[K,Q] := \sum_i (\nabla_{e_i} K) \cdot (e_i \lrcorner Q) - (\nabla_{e_i} Q) \cdot (e_i \lrcorner K)$$

Lemma: ① $dK = [K, g]$

② Die Abbildung $\Gamma(\mathrm{Sym}^k TM) \longrightarrow C^\infty(TM)$, $K \mapsto (X \mapsto K(X,\ldots,X))$ ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren bzgl. Schouten- und Poisson-Klammer.

<u>Satz:</u> Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

(i) K ist ein Killing-Tensor, d.h. $dK = 0$

(ii) $(\nabla_X K)(X, \dots, X) = 0$

(iii) $f_{K,\gamma}(t) := K_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dots, \dot\gamma(t))$
ist konstant entlang jeder Geodäte γ

(iv) $[K, g] = 0$

<u>Bemerkung:</u> Nach (iii) definieren Killing-Tensoren polynomiale erste Integrale. Äquivalent $\{K, H\} = 0$

<u>Beispiele:</u>
- $k=1$: Killing-VF parallele Tensoren
- Produkte von Killing-VF
- S^n: $K_p(X,Y) = R(X, p, p, Y)$ $p \in S^n$, $X, Y \in T_p S^n = p^\perp$

  R: algebraischer Krümmungstensor auf $\mathbb{R}^{n+1}$

maximale Anzahl, Eigenraum zu minimalem Eigenwert von Δ_L

$$\Delta_L := \nabla^* \nabla + q(R) \quad \text{auf } \Gamma(\mathrm{Sym}^k TM)$$

auf S^n: $q(R) = k(k+n-2)$ $\qquad (Ric = (n-1) g)$

<u>Satz:</u> ① $K \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k_0 TM)$ ist ein konformer Killing-Tensor

$\Leftrightarrow \quad P_{\varepsilon_1} K = 0$

② $K \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k_0 TM)$ ist ein Killing-Tensor

$\Leftrightarrow \quad P_{\varepsilon_1} K = 0 = P_{\varepsilon_2} K$

③ Sei M kompakt, dann gilt auf $\mathrm{Ker}\,\delta$:

$$\Delta_L \geq 2q(R)$$

mit Gleichheit auf dem Raum der Killing-Tensoren

<u>Beweis von ③:</u> $\Delta_L - 2q(R) = \nabla^* \nabla - q(R)$

$= \delta d - d\delta \geq 0$ auf $\mathrm{Ker}\,\delta$

<u>Satz</u> (Dairbekov, Sharafutdinov, 2010)

Sei (M,g) eine kompakte Mfk. mit nicht-positiver Schnittkrümmung $\sec \leq 0$. Dann ist jeder spur-freier konformer Killing-Tensor parallel.

Es gibt keine spur-freien konformen Killing-Tensoren wenn die Schnittkrümmung negativ ist

<u>Folgerung</u>: Sei Σ_g eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann existieren auf Σ_g keine spur-freien konformen Killing-Tensoren

<u>Vermutung</u>: Es gibt keine Killing-Tensoren auf T^2 (bzgl. einer beliebigen Metrik) vom Grad ≥ 3 unabhängig von Killing-Tensoren in Grad 1 oder 2

<u>Beweis.</u>

<u>WBF</u>: $q(R)K = -k\, P_{\varepsilon_1}^* P_{\varepsilon_1} + (n+k-2) P_{\varepsilon_2}^* P_{\varepsilon_2} + P_{\varepsilon_3}^* P_{\varepsilon_3}$

$K \in \Gamma(\mathrm{Sym}^k_0 TM)$ konformer Killing-Tensor $\iff P_{\varepsilon_1} K = 0$

$\qquad \longrightarrow q(R)K \geq 0$

<u>Behauptung</u>: $\sec \leq 0 \implies q(R) \leq 0$ (und analoge Relationen)

<u>Anwendung</u>: $P_{\varepsilon_1} K = 0$, $\sec \leq 0 \to g(q(R)K, K) = 0$

$\to (n+k-2)\|P_{\varepsilon_2} K\|^2 + \|P_{\varepsilon_3} K\|^2 = 0$

$\to P_{\varepsilon_i} K = 0,\ i = 1,2,3$

$\to \nabla K = 0$

- Man definiert ein neues Skalarprodukt auf $\mathrm{Sym}^k_0 T$:

$$\tilde{g}(K_1, K_2) = \int_{S_T} K_1(x)\cdot K_2(x)\, dM \qquad K_1, K_2 \in \mathrm{Sym}^k_0 T$$

$S_T \subset T$ Sphäre

$$= \frac{1}{c}\, g(K_1, K_2) \qquad \text{für ein } c > 0$$

<u>da</u>: Schur-Lemma + Invarianz

- Man definiert eine Bilinear-Form auf T:

$$B_X(Y,Z) := g(R_{XY}X, Z)$$

$X \in T$ fixiert
$Y, Z \in T$

$\sec < 0 \Rightarrow B_X$ ist eine positiv-definite symmetrische Bilinear-Form

$\Rightarrow \exists$ ONB $\{e_i\}$

mit: $B_X(e_i, e_i) = a_i(X) > 0$

- <u>punktweise Rechnung.</u>

$$g(q(R)K, K) = \sum_i g(e_j \cdot e_i \lrcorner R_{e_i e_j} K, K)$$
$$= \sum_i g(R_{e_i, e_j} K, e_i \cdot e_j \lrcorner K)$$

$$= c \cdot \int_{S_T} \sum_i (R_{e_i e_j} K)(x) \cdot (e_i \cdot e_j \lrcorner K)(x) \, dM$$

$$= c \cdot k^2 \int_{S_T} \sum_i g(R_{e_i e_j} e_k, X) \cdot (e_k \lrcorner K)(X) \cdot g(e_i, X)(e_j \lrcorner K)(X) \, dM$$

$$= -c\, k^2 \int_{S_T} \sum_i g(R_{X, e_j} X, e_k) \cdot (e_k \lrcorner K)(X) \cdot (e_j \lrcorner K)(X) \, dM$$

$$= -c\, k^2 \int_{S_T} \sum_i B_X(e_j, e_k)\,(e_k \lrcorner K)(X)\,(e_j \lrcorner K)(X) \, dM$$

$$= -c\, k^2 \int_{S_T} \sum_i a_j(X)\,((e_j \lrcorner K)(X))^2 \, dM$$

$$< 0$$

<u>Bemerkung:</u> • $K(X) = K(X, \dots, X) = g(K, X^r)$

$$\Rightarrow (a \cdot b \lrcorner K)(X) = g(a \cdot b \lrcorner K, X^k)$$
$$= k\, g(a, X)\, g(b \lrcorner K, X^{k-1})$$
$$= k\, g(a, X)\,(b \lrcorner K)(X)$$

$$\Rightarrow (R_{YZ} K)(X) = \sum_i (R_{Y,Z} e_k \cdot e_k \lrcorner K)(X)$$
$$= k \sum_i g(R_{Y,Z} e_k, X)(e_k \lrcorner K)(X)$$